

**Застосування стохастичних, статистичних та функціональних методів для аналізу асимптотичної поведінки випадкових полів.**

**Применение стохастических, статистических и функциональных методов для анализа асимптотического поведения случайных полей.**

**Application of stochastic, statistical and functional methods to analysis of asymptotic behavior of random fields.**

**1. Номер державної реєстрації теми - 0118U003614.**

**2. Науковий керівник—д. ф.-м. н., проф. Клесов О.І., Клёсов О.И., Klesov Oleg I.**

**3. Суть розробки, основні результати.**

(укр.) Суть роботи полягає в дослідженні асимптотичної поведінки випадкових полів та функціоналів від них, а також застосуванні отриманих результатів до теорії випадкових процесів, статистики випадкових процесів, математичного аналізу та математичної фізики. При розв'язанні поставлених задач було отримано наступні результати.

Для узагальнених множин відновлення встановлено посилений закон великих чисел та закон повторного логарифму у термінах включень множин та у метричних термінах, використовуючи метрики Хаусдорфа та Фреше-Нікодима. Крім того, отримано функціональну граничну теорему для радіальних функцій в сенсі збіжності в сенсі збіжності за розподілом.

Для випадкових зарядів отримано рівномірний посилений закон великих чисел. Наведено застосування отриманих результатів до випадкових мір, породжених сумами випадкових величин, міченими точковими процесами та стохастичними інтегралами.

Досліджено клас правильно змінних послідовностей з не виродженими групами регулярних точок. Для таких послідовностей отримані деякі аналоги властивостей правильно змінних функцій. Проведено порівняння властивостей правильно змінних функцій та правильно змінних послідовностей, встановлено певні відмінності. Крім того, у роботі розглянуто певні класи функцій, які узагальнюють правильно змінні, та отримані інтегральні представлення типу Карамати для таких функцій.

Для неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з відокремленням стохастичних та детермінованих змінних досить загального типу отримано асимптотичну поведінку розв'язків в термінах параметрів рівняння. Результати застосовуються до задач про асимптотичну поведінку деяких конкретних рівнянь фінансової математики.

Для заданих послідовностей  $(a_n)$  та  $(b_n)$  та заданої функції  $f$  знайдено умови, за яких функція  $f$  зберігає еквівалентність послідовностей у сенсі  $\liminf$ , тобто умови, за яких зі співвідношення  $\liminf (a_n/b_n) = 1$  випливає співвідношення  $\liminf (f(a_n)/f(b_n)) = 1$

Досліджено граничну поведінку сум елементів лінійної авторегресійної послідовності у термінах повної збіжності і збіжності пов'язаних з нею рядів Сюя-Роббінса-Ердеша-Спітцера-Баума-Каца. Отримано повний аналог теорем Сюя-Роббінса-Ердеша та Спітцера, а також деякі частинні випадки теореми Баума-Каца. Крім того, встановлено посилений закон великих чисел для сум елементів авторегресійної послідовності у формі Колмогорова-Марцинкевича-Зігмунда.

Отримано посилену властивість слабкої консистентності оцінок Коенкера-Бассета в лінійній моделі регресії з нелінійно перетвореним гауссівським стаціонарним часовим рядом та сингулярним спектром в якості випадкового шуму.

Отримано нову достатню умову, за якої узагальнені розв'язки параболічної початково-крайової задачі для системи Петровського з однорідними початковими умовами Коші, є

класичними. Умова формулюється у термінах приналежності правих частин задачі до деяких анізотропних просторів Хермандера.

**(рос.)** Суть работы заключается в исследовании асимптотического поведения случайных полей и функционалов от них, а также применении полученных результатов в теории случайных процессов, статистики случайных процессов, математическом анализе и математической физике. При решении поставленных задач были получены следующие результаты.

Для обобщенных множеств восстановления установлены усиленный закон больших чисел и закон повторного логарифма в терминах включений множеств и в метрических терминах, используя метрики Хаусдорфа и Фреше-Никодима. Кроме того, получена функциональная предельная теорема в смысле сходимости по распределению.

Для случайных зарядов получен равномерный усиленный закон больших чисел. Приведены применения полученных результатов к случайным мерам, порожденным суммами случайных величин, меченым точечным процессам и стохастическим интегралам.

Исследован класс псевдорегулярных последовательностей с невырожденными группами регулярных точек. Для таких последовательностей получены некоторые аналоги свойств функций правильного изменения. Проведено сравнение свойств псевдорегулярных функций и последовательностей, установлены определенные различия. Кроме того, в работе рассмотрены определенные классы функций, которые обобщают псевдорегулярные, и получены интегральные представления типа Караматы для таких функций.

Для неоднородного стохастического дифференциального уравнения с разделением стохастических и детерминированных переменных достаточно общего типа получено асимптотическое поведение решений в терминах параметров уравнения. Результаты применяются к задачам об асимптотическом поведении некоторых конкретных уравнений финансовой математики.

Для заданных последовательностей  $(a_n)$  и  $(b_n)$  и заданной функции  $f$  найдены условия, при которых функция  $f$  сохраняет эквивалентность последовательностей в смысле  $\liminf$ , то есть условия, при которых из соотношения  $\liminf (a_n/b_n) = 1$  следует соотношение  $\liminf (f(a_n)/f(b_n)) = 1$ .

Исследовано предельное поведение сумм элементов линейной авторегрессионной последовательности в терминах полной сходимости и сходимости связанных с ней рядов Сюя-Роббинса-Эрдеша-Спитцера-Баума-Каца. Получен полный аналог теорем Сюя-Роббинса-Эрдеша и Спитцера, а также некоторые частные случаи теоремы Баума-Каца. Кроме того, установлен усиленный закон больших чисел для сумм элементов авторегрессионной последовательности в форме Колмогорова-Марцинкевича-Зигмунда.

Получено обобщение свойства слабой консистентности оценок Коенкера-Бассета в линейной модели регрессии с нелинейно преобразованным гауссовским стационарным временным рядом и сингулярным спектром в качестве случайного шума.

Получено новое достаточное условие, при котором обобщенные решения параболической начально-краевой задачи для системы Петровского с однородными начальными условиями Коши, являются классическими. Условие формулируется в терминах принадлежности правых частей задачи некоторым анизотропным пространствам Хермандера.

**(eng.)** The project is aimed at studying asymptotic behavior of random fields and functionals related to them, as well as applications of obtained results to the theory of random processes, statistics of random processes, mathematical analysis and mathematical physics. While solving the set of tasks the following results were obtained.

For generalized renewal sets, the strong law of large numbers and the law of iterated logarithm in terms of sets inclusions as well as in metric terms using Hausdorff metrics and Fréchet-

Nycodim metrics, are obtained. Moreover, functional limit theorem in the sense of convergence in distribution are also provided.

For random signed measures, the uniform strong law of large numbers is considered. Some applications of the obtained results to random measures generated by sums of random variables, marked point processes and stochastic integrals are given.

The class of pseudoregularly varying sequences with nondegenerate groups of regular points is investigated. For such sequences some analogues of properties of correctly pseudoregularly varying functions are obtained. Comparison of properties of pseudoregularly varying functions and sequences are carried out, and certain differences are stated. Moreover, in the work certain classes of functions that generalize pseudoregularly varying functions are studied. Finally, Karamata type integral representations for such functions are given.

For inhomogeneous stochastic differential equation with separation of stochastic and deterministic variables of fairly general type, the asymptotic behavior of solutions in terms of parameters of the equation is obtained. These results are applied to problems on the asymptotic behavior of some specific equations in financial mathematics.

For the given sequences  $(a_n)$  and  $(b_n)$  and some function  $f$  conditions under which the function  $f$  preserves equivalence of sequences in the sense of  $\liminf$ , i.e. conditions under which the relation  $\liminf(a_n/b_n)=1$  implies  $\liminf(f(a_n)/f(b_n))=1$ , are studied.

The asymptotic behavior of sums of elements of linear autoregressive sequences in terms of complete convergence and in terms of Hsu-Robbins-Erdos-Spitzer-Baum-Katz series related to it, is investigated. Complete analogues of the Hsu-Robbins-Erdos and Spitzer theorems are obtained, as well as some partial cases of the Baum-Katz theorem. In addition, the Kolmogorov-Marcinkiewicz-Sigmund strong law of large numbers for sums of elements of autoregressive sequence is considered.

An enhanced property of the weak consistency of the Koenker-Bassett estimates in a linear regression model with a nonlinearly transformed Gaussian stationary time series and a singular spectrum as a random noise is obtained.

A new sufficient condition, under which general solutions of the parabolic initial-boundary value problem for the Petrovsky system with homogeneous Cauchy initial conditions are said to be classical, is obtained. This condition is formulated in terms of belonging of the right parts of the problem to some anisotropic Hoermander spaces.

**4. Наявність охоронних документів на об'єкти права інтелектуальної власності.**  
Немає.

**5. Порівняння зі світовими аналогами.**

Науковий технічний рівень виконаної роботи відповідає світовому рівню. Всі основні результати є новими та пріоритетними. Деяку частину результатів спільно з провідними фахівцями інших країн, зокрема Швейцарії, Німеччини, Норвегії, Франції, та ін. Напрямок виконаної роботи є актуальним.

**6. Економічна привабливість для просування на ринок.**

Робота є фундаментальною і не має безпосередньо економічного значення. Всі отримані результати є теоретичними. Їх теоретична цінність полягає у подальшому розвитку теорії псевдорегулярних функцій, узагальнених процесів відновлення, випадкових полів, та більш ефективному використанні при отриманні нових теоретичних і практичних результатів різних галузей науки, а також впровадження у навчальний процес.

**7. Потенційні користувачі (галузі, міністерства, підприємства, організації).**

Наукові та вищі навчальні заклади України, зокрема "КПІ ім. Ігоря Сікорського", Київський національний університет України ім. Тараса Шевченка, Інститут математики НАН України, Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Інститут

кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, а також університети Німеччини (міст Кельна, Падерборна і Ульма), Франції (м. Париж), Швейцарії (м. Берн), Норвегії (м. Осло) та інші зацікавлені наукові установи.

Проведені дослідження та їх результати використовуються та можуть використовуватися в подальшому для теоретичних і прикладних досліджень в теорії випадкових процесів, статистиці випадкових процесів, криптографії, актуарній та фінансовій математиці, теорії дифракції, електростатиці тощо.

## **8. Стан готовності розробки.**

Всі результати науково-дослідної роботи опубліковані у провідних вітчизняних та закордонних фахових виданнях, в тому числі у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (зокрема Scopus та Web of science), а також доповідалися на міжнародних наукових конференціях. Деякі результати увійшли до трьох монографій, виданих авторами роботи.

## **9. Існуючі результати впровадження.**

За результатами НДР розроблено і впроваджено нові лекційні курси «Аналіз часових рядів», «Фінансова математика фондового ринку», «Процеси Леві у моделях фінансової математики», «Елементи теорії масового обслуговування», «Випадкові блукання у задачах фінансової математики», «Прикладні моделі нелінійного регресійного аналізу», а також оновлено деякі розділи класичних лекційних курсів. Крім того результати проведених досліджень використовуються в навчальних посібниках та при проведенні наукової роботи зі студентами та аспірантами.

За матеріалами роботи захищено 1 докторську та 6 кандидатських дисертації, 7 магістерських робіт та 3 дипломних проекти; опубліковано 3 монографії, 2 розділи у монографіях у провідних закордонних видавництвах; створено 2 підручники та 1 дистанційний курс; опубліковано 23 статті, з яких 13 входять до міжнародних наукометричних БД, в тому числі 13 у Scopus; зроблено 46 доповідей на конференціях, в тому числі 39 з них - на міжнародних.

## **10. Назва організації, телефон, E-mail**

КПІ ім. Ігоря Сікорського, фізико-математичний факультет, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, (044) 204-97-40, [matan@kpi.ua](mailto:matan@kpi.ua)

## **11. Фото розробки**

Немає.

## **12. Перелік публікацій за матеріалами досліджень за період виконання розробки.**

1. Bogdanskii V.Yu., Klesov O.I. and Molchanov I., Uniform strong law of large numbers // Methodology and Computing in Applied Probability. – 2019. – P.1-10.
2. Buldygin V.V., Indlekofer K.-H., Klesov O.I., Steinebach J., Pseudo-regularly varying functions and generalized renewal processes. – Cham, Switzerland: Springer. – 2018. – 450 p.
3. Булдігін В.В., Клесов О.І., Тимошенко О.А., Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. – Вінниця: ФОП Кушнір Ю.В. – 2018. – 164 с.
4. Pienko A., Molchanov I., Limit theorems for multidimensional renewal sets // Acta Mathematica Hungarica. – 2018. – Vol. 156. – P. 56-81.
5. Pienko A., Convergence of point processes associated with coupon collector's and Dixie cup problems // Electron. Commun. Probab. – 2019. – Vol. 24, no. 51. – P. 1-9.
6. Pienko A., Limit theorems in the extended coupon collector's problem // 2020. – 21 pages. (подано до друку) <https://arxiv.org/abs/2002.00650>

7. Ільєнко А.Б., Руновська Л.А., Чисельний алгоритм для знаходження ймовірності виродження в моделі Крамера-Лундберга // *Технічні науки і технології*. – 2018. – №3(13). – С. 105-113.
8. Іїєнко М., Complete convergence type theorems for sums of elements of linear autoregression sequences // *Mathematics in Modern Technical University*. – 2019. (прийнято до друку).
9. Іїєнко М., On convergence of Baum-Katz series for elements of linear autoregression // 2020. – 14 pages. (подано до друку) <https://arxiv.org/abs/2008.05235>
10. Іванов О.В., Каптур Н.В., Савич І.М., Консистентність оцінок Коенкера-Бассетта в лінійній моделі регресії // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. – 2018. – Вип. 3. – С. 17-24.
11. Іванов О.В., Лимар О.В., Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів двовимірної синусоїдної моделі спостережень // *Теорія ймовір. та матем. статист.* – 2019. – Вип. 100. – С. 102-122.
12. Ivanov O.V., Orlovskiy I.V., Large deviations of regression parameter estimate in continuous-time models with sub-Gaussian noise // *Modern stochastics: theory and applications*. – 2018. – Vol. 5, no.2. – P. 191--206.
13. Ivanov, A.V., Leonenko, N.N., Orlovskiy, I.V., On the Whittle estimator for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models // *Stat. Inference Stoch. Process.* – 2020. – Vol. 23. – P. 129-169.
14. Ivanov O.V., Lymar O.V., The asymptotic normality for the least squares estimator of parameters in a two dimensional sinusoidal model of observations // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. – 2020. – Vol. 100. – P. 107-131.
15. Klesov O. I., Molchanov I., Uniform strong law of large numbers for random signed measures // Chapter 18 in the book "Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals Problems and Challenges". – Cham: Springer. – 2019. – P. 335-350.
16. Klesov O.I., Tymoshenko E.A., Almost sure asymptotic properties of solutions of a class of non-homogeneous stochastic differential equations // Chapter 6 in the book "Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals Problems and Challenges". – Cham: Springer. – 2019. – P. 97-116.
17. Klesov O.I., Steinebach J.G., On preserving the limit points of corresponding objects // *Journal of mathematical analysis and applications*. – 2020. – Vol. 486, no. 2.
18. Klesov O.I., Steinebach J.G., Some comments on the paper «О одном O-инверзном ставу» by Vojislav G. Avakumovic // *Mathematics in Modern Technical University*. – 2018. – No.1. --- P. 5-10.
19. Лось В.М., Параболічні крайові задачі у просторах Хермандера // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння (наук. консультант – д. ф.-м. н., проф. В.А. Михайлець). – Київ. – 2018. – 26с.
20. Los V., A condition for generalized solutions of a parabolic problem for a Petrovskii system to be classical // *Methods of Functional Analysis and Topology*. – 2020. – Vol. 26, no. 2. – P. 111-118.
21. Лось В.М. 2b-анізотропні простори Хермандера в циліндричних областях // *Доповіді національної академії наук України* – 2018. – № 6. – С. 3-8.
22. Los V., Mikhailets V., Murach A., Parabolic problems in generalized Sobolev spaces – 2020. – 34 p. (подано до друку) <https://arxiv.org/pdf/1907.04283.pdf>
23. Маслюк Г.О., Одновимірні крайові задачі з параметром у функціональних просторах дробової гладкості // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння (наук. консультант – д. ф.-м. н., проф. В.А. Михайлець). – Київ. – 2019. – 20 с.

24. Maslyuk H.O., Mykhalets V.A., Continuity in the Parameter for the Solutions of One-Dimensional Boundary-Value Problems for Differential Systems of Higher Orders in Slobodetskii Spaces // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2018. – Vol. 70, no. 3. – P. 467-476.

25. Маслюк Г.О., Михайлець В.А., Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Слободецького // *Укр. Мат. Журн.* 2018. – Т. 70, № 3. – С. 404-411.

26. Masliuk H., One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Holder spaces // *Methods of Functional Analysis and Topology* – 2018. – Vol. 24, № 2. – P. 143-151.

27. Mikhailets V.A., Pelekhata O.B., Reva N.V., Limit Theorems for the Solutions of Boundary-Value Problems // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2018. – Vol. 70, no. 2. – P. 243-251.

28. Михайлець В.А., Пелехата О.Б., Рева Н.В., Предельные теоремы для решений крайевых задач // *Укр. Мат. Журн.* – 2018. – Т. 70, № 2. – С. 216-223.

29. Moklyachuk M., Masyutka O., Golichenko I., Estimates of periodically correlated Isotropic Random Fields. – New York: Nova science publishers. – 2018. – 295 p.

30. Москвичова К.К., Властивості корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі нелінійної регресії // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика (наук. керівник – д. ф.-м. н., проф. О.В. Іванов). – Київ. – 2019. – 20 с.

31. Pavlenkov V., Karamata integral representations for functions generalizing regularly varying functions // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2018. – Vol. 69. – P. 1496-1505.

32. Павленков В.В., Властивості функцій з невідродженими групами регулярних точок // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика (наук. керівник – д. ф.-м. н., проф. О.І. Клесов). – Київ. – 2018. – 21с.

33. Павленков В.В., ORV послідовності з невідродженими групами регулярних точок // *Укр. мат. журн.* – 2018. – Вип. 70, № 7. – С. 933--951.

34. Пелехата О.Б., Загальні крайові задачі з параметром // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння (наук. консультант – д. ф.-м. н., проф. В.А. Михайлець). – Київ. – 2018. – 21с.

### **13. Ключові слова до розробки:**

УЗАГАЛЬНЕНІ МНОЖИНИ ВІДНОВЛЕННЯ, ВИПАДКОВІ ЗАРЯДИ, ЕКСТРЕМАЛЬНІ МНОЖИНИ, ФУНКЦІОНАЛИ ВІД ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПОЛІВ, ПОСИЛЕНІ ЗАКОНИ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ, ЗАКОНИ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМУ, СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ПОВНА ЗБІЖНІСТЬ, ПСЕВДОРЕГУЛЯРНО ЗМІННІ ФУНКЦІЇ, ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА, ОЦІНКИ КОЕНКЕРА-БАССЕТА ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕСІЇ.